۱-۶: ویژه‌مقدارها و ویژه‌بردارها Eigenvalues & Eigenvectors

اگر برداری با تأثیر تانسور T، به برداری موازی خودش تبدیل شود، آن بردار، ویژه‌بردار (بردار ویژه) و مقدار متناظر با آن، ویژه‌مقدار (مقدار ویژه) نامیده می‌شوند.

$$\tilde{T}\vec{a} = \lambda\vec{a} = \lambda\tilde{I}\vec{a} \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda \ eigenvalue \\ \vec{a} \ eigenvector \end{vmatrix}$$

$$\tilde{T}\vec{a} = \lambda\vec{a} \rightarrow \tilde{T}a_j\hat{e}_j = \lambda a_j\hat{e}_j \rightarrow \left(\hat{e}_i \cdot \tilde{T}\hat{e}_j\right)a_j = \lambda\left(\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j\right)a_j = \lambda\delta_{ij}a_j$$
$$\Rightarrow T_{ij}a_j = \lambda a_i$$

$$\tilde{T}\vec{a} = \lambda\vec{a} = \lambda\tilde{I}\vec{a} \quad or \quad T_{ij}a_j = \lambda a_i = \lambda\delta_{ij}a_j$$

هر بردار دیگری که به موازات بردار $\vec{a}$ باشد، ویژه‌مقدارش همان λ می‌شود.

$$\vec{b} \parallel \vec{a} \rightarrow \vec{b} = \alpha\vec{a}$$
$$\tilde{T}\vec{b} = \tilde{T}\left(\alpha\vec{a}\right) = \alpha\left(\tilde{T}\vec{a}\right) = \alpha\left(\lambda\vec{a}\right) = \lambda\left(\alpha\vec{a}\right) = \lambda\vec{b}$$
$$\Rightarrow \tilde{T}\vec{b} = \lambda\vec{b}$$

بنابراین ویژه‌بردار متناظر با ویژه‌مقدار λ دارای اندازه‌ی اختیاری است؛ لذا می‌توان اندازه‌ی بردار را واحد درنظر گرفت.

$\hat{n}$ ویژه‌بردار یکّه متناظر با ویژه‌مقدار λ است.

$$\vec{a}=|\vec{a}|\hat{n} \;\rightarrow\; \hat{n}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \;,\; |\hat{n}|=1 \; unit\,vector$$

$$\tilde{T}\hat{n}=\lambda\hat{n}=\lambda\tilde{I}\hat{n} \quad or \quad T_{ij}n_j=\lambda n_i=\lambda\delta_{ij}n_j$$
$$\tilde{T}\hat{n}-\lambda\tilde{I}\hat{n}=0 \quad or \quad T_{ij}n_j-\lambda\delta_{ij}n_j=0$$
$$\left(\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right)\hat{n}=0 \quad or \quad \left(T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)n_j=0$$

دستگاه معادلات بالا، یک دستگاه همگن خطّی نامعیّن (۳ معادله و ۴ مجهول) است. تنها زمانی جواب بدیهی غیر صفر دارد که:

$$|\hat{n}|=1\neq 0 \;\Rightarrow\; \left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=0 \quad or \quad \left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0$$
$$\left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=\left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=\varepsilon_{ijk}\left(T_{i1}-\lambda\delta_{i1}\right)\left(T_{j2}-\lambda\delta_{j2}\right)\left(T_{k3}-\lambda\delta_{k3}\right)=0$$

$$\begin{aligned}
&\left(\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right)\hat{n}=0 && or && \left(T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)n_j=0\\
&\left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=0 && or && \left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0\\
&\hat{n}\cdot\hat{n}=1 && or && n_jn_j=1
\end{aligned}$$

اگر ویژه‌بردار، یکّه‌بردار دستگاه مختصات باشد، یعنی:

$$\tilde{T}\hat{e}_i=\lambda\hat{e}_i=T_{ji}\hat{e}_j$$

$$if \quad \tilde{T}\hat{e}_1=\lambda_1\hat{e}_1=T_{11}\hat{e}_1+T_{21}\hat{e}_2+T_{31}\hat{e}_3 \;\Rightarrow\; \lambda_1=T_{11}$$
$$if \quad \tilde{T}\hat{e}_2=\lambda_2\hat{e}_2=T_{12}\hat{e}_1+T_{22}\hat{e}_2+T_{32}\hat{e}_3 \;\Rightarrow\; \lambda_2=T_{22}$$
$$if \quad \tilde{T}\hat{e}_3=\lambda_3\hat{e}_3=T_{13}\hat{e}_1+T_{23}\hat{e}_2+T_{33}\hat{e}_3 \;\Rightarrow\; \lambda_3=T_{33}$$

یکّه‌بردارهای ویژه، دو به دو برهم عمودند، لذا ویژه‌مقدارهای متناظر با آنها درایه‌های قطر اصلی تانسور می‌شوند.

$$\hat{e}_1\perp\hat{e}_2\perp\hat{e}_3 \;\Rightarrow\; \lambda_i=T_{ii} \;\;, i=j$$

برای حلّ دستگاه معادله‌ی نامعیّن $\left(\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right)\hat{n}=0$، ابتدا باید λ را با حلّ معادله‌ی $\left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=0$ به‌دست آورد.

$$\left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=\left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow f\,(\lambda)=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0 \;\; characteristic\; eq.$$

ثابت‌های معادله مشخصه، پایاهای تانسور (tensor invariants) نامیده می‌شوند.

$$I_1, I_2, I_3 \;\; \text{tensor invariants}$$

$$I_1=T_{11}+T_{22}+T_{33}=T_{ii}$$

$$I_2=\begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}\right) \quad i\neq j$$

$$I_3=\begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}=\varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3}$$

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0$$
$$I_1=tr(\tilde{T})=T_{ii}$$
$$I_2=\frac{1}{2}\left[\left(tr\tilde{T}\right)^2-tr(\tilde{T}^2)\right]=\frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}\right) \quad i\neq j$$
$$I_3=\det(\tilde{T})=\varepsilon_{ijk}T_{i1}T_{j2}T_{k3}$$

تمرین: با استفاده از نمادگذاری شاخصی، معادله مشخصه و پایاهای عددی تانسور $\tilde{T}$ را به‌دست آورید.

راهنمایی: از رابطه‌ی $\left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0$ آغاز کنید.

۱-۶-۱: تانسور متقارن حقیقی Real Symmetric Tensor

اگر تانسور متقارن و مؤلفه‌های آن حقیقی باشند (تانسور تنش و تانسور کرنش)، ویژه‌مقدارهای تانسور، حقیقی‌اند و ویژه‌بردارهای متناظر با آن نیز حقیقی می‌شوند. مقادیر ویژه، مقادیر اصلی (principal values) و بردارهای ویژه، جهات اصلی (principal directions) نامیده می‌شوند. جهات اصلی دو به دو برهم عمودند.

symmetric $\tilde{T}^T = \tilde{T}$

$f(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *principal values* $\Rightarrow \hat{n}_1 \perp \hat{n}_2 \perp \hat{n}_3$ *principal directions*

اگر تانسور متقارن حقیقی باشد، λ_1 و λ_2 مقادیر اصلی حقیقی‌اند؛ $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ جهات اصلی متناظر برهم عمودند.

اثبات:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{T}\hat{n}_1 = \lambda_1\hat{n}_1 &\rightarrow \hat{n}_2\cdot\tilde{T}\hat{n}_1 = \hat{n}_2\cdot\lambda_1\hat{n}_1\\ \tilde{T}\hat{n}_2 = \lambda_2\hat{n}_2 &\rightarrow \hat{n}_1\cdot\tilde{T}\hat{n}_2 = \hat{n}_1\cdot\lambda_2\hat{n}_2\end{aligned}\right\} \hat{n}_2\cdot\tilde{T}\hat{n}_1 - \hat{n}_1\cdot\tilde{T}\hat{n}_2 = (\lambda_1-\lambda_2)\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2$$

$$\hat{n}_2\cdot\tilde{T}\hat{n}_1 = \hat{n}_1\cdot\tilde{T}^T\hat{n}_2 = \hat{n}_1\cdot\tilde{T}\hat{n}_2$$
$$\Rightarrow (\lambda_1-\lambda_2)\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2 = 0$$

در حالت کلّی $\lambda_1 \neq \lambda_2$ است، بنابراین $\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2 = 0$ یعنی $\hat{n}_1 \perp \hat{n}_2$ می‌باشد. با اثبات مشابه $\hat{n}_1 \perp \hat{n}_2 \perp \hat{n}_3$ می‌شوند.

مؤلفه‌های تانسور $\tilde{T}$ را نسبت به جهات اصلی می‌توان به‌دست آورد. جهات اصلی همانند یکّه‌بردارهای دستگاه مختصات عمل می‌کند.

$$\tilde{T}\hat{n} = \lambda\hat{n} \rightarrow \tilde{T}\hat{n}_j = T_{ij}\hat{n}_i = \lambda\hat{n}_j$$
$$T_{ij} = \hat{n}_i\cdot\tilde{T}\hat{n}_j = \hat{n}_i\cdot\lambda\hat{n}_j = \begin{cases}\lambda & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\left[\tilde{T}\right]_{\hat{e}_i} = \begin{bmatrix}T_{11} & T_{12} & T_{13}\\ T_{12} & T_{22} & T_{23}\\ T_{13} & T_{23} & T_{33}\end{bmatrix} \quad \& \quad \left[\tilde{T}\right]_{\hat{n}_i} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$
$$I_1 = T_{ii} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right) = \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3$$
$$I_3 = \left|T_{ij}\right| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

مقادیر کمینه و بیشینه T_{ij} در λ_i وجود دارد.

$\hat{n}=\alpha_j\hat{e}_j$

$$\begin{cases}\left(\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right)\hat{n}=0\\ \hat{n}\cdot\hat{n}=1\end{cases} \quad or \quad \begin{cases}\left(T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right)\alpha_j=0\\ \alpha_j\alpha_j=1\end{cases}$$

$$\left|\tilde{T}-\lambda\tilde{I}\right|=\left|T_{ij}-\lambda\delta_{ij}\right|=0 \rightarrow \lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0 \Rightarrow \lambda_i:\lambda_1\rangle\lambda_2\rangle\lambda_3$$

پس از استخراج سه مقدار ویژه، سه بردار ویژه متناظر با آنها به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}\left(T_{11}-\lambda\right)\alpha_1+T_{12}\alpha_2+T_{13}\alpha_3=0\\ T_{21}\alpha_1+\left(T_{22}-\lambda\right)\alpha_2+T_{23}\alpha_3=0\\ T_{31}\alpha_1+T_{32}\alpha_2+\left(T_{33}-\lambda\right)\alpha_3=0\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\end{cases}$$

مثال: اگر تانسور $\tilde{T}$ نسبت به مبنای $\hat{e}_i$ داده شده باشد، مطلوبست:

الف- پایاهای عددی تانسور و معادله مشخصه آن؛

ب- مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با آن.

$$[T]_{\hat{e}_i}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&4\\0&4&-3\end{bmatrix}$$

حلّ: الف)

$$I_1=T_{ii}=2$$
$$I_2=\frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj}-T_{ij}T_{ji}\right)=-25$$
$$I_3=\left|T_{ij}\right|=-50$$
$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0 \rightarrow \lambda^3-2\lambda^2-25\lambda+50=0$$

ب)

$$\Rightarrow \lambda_1=+5\rangle\lambda_2=2\rangle\lambda_3=-5$$

$$\begin{cases}(T_{ij}-\lambda\delta_{ij})\alpha_j=0\\ \alpha_j\alpha_j=1\end{cases}$$

$$\lambda_{\max}=\lambda_1=+5$$

$$\begin{cases}-3\alpha_1=0\ \rightarrow\ \alpha_1=0\\ \left.\begin{array}{l}-2\alpha_2+4\alpha_3=0\\ \ \ 4\alpha_2-8\alpha_3=0\end{array}\right\}\alpha_2=2\alpha_3\end{cases}$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\ \rightarrow\ 5\alpha_3^2=1\ \rightarrow\ \alpha_3=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \hat{n}_1=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{e}_2+\hat{e}_3)$$

$$\lambda_{med}=\lambda_2=2$$

$$\begin{cases}0\alpha_1=0\ \rightarrow\ \alpha_1\neq 0\\ \left.\begin{array}{l}\ \alpha_2+4\alpha_3=0\\ 4\alpha_2-5\alpha_3=0\end{array}\right\}\alpha_2=0=\alpha_3\end{cases}$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\ \rightarrow\ \alpha_1^2=1\ \rightarrow\ \alpha_1=\pm 1\ \Rightarrow\ \hat{n}_2=\pm\hat{e}_1$$

$$\lambda_{\min}=\lambda_3=-5$$

$$\begin{cases}7\alpha_1=0\ \rightarrow\ \alpha_1=0\\ \left.\begin{array}{l}8\alpha_2+4\alpha_3=0\\ 4\alpha_2+2\alpha_3=0\end{array}\right\}\alpha_3=-2\alpha_2\end{cases}$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1\ \rightarrow\ 5\alpha_2^2=1\ \rightarrow\ \alpha_2=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\ \Rightarrow\ \hat{n}_3=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{e}_2-2\hat{e}_3)$$